北一女中 103 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期題目：

2014 年 11 月 21 日下午 1 點鐘截止

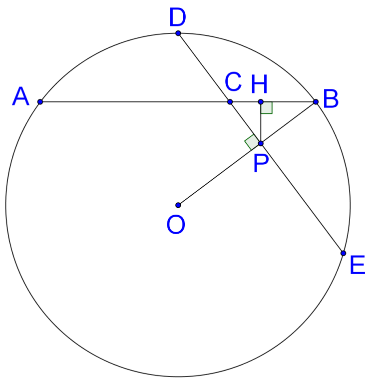
2-1 (1) 請證明：$1,2,3,\cdots\cdots,10$ 可以兩兩配成一對，使得每一對的和都是質數，且這 5 個質數都相異。

(2) 請證明：$1,2,3,\cdots\cdots,20$ 不可能兩兩配成一對，使得每一對的和都是質數，且這 10 個質數都相異。

2-2 黑板上有$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\cdots,\frac{1}{2014}$共 2014 個數。小綠用板擦將黑板上其中任意兩數 x_1 與 y_1 擦去，再於黑板上添寫 $x_1y_1+x_1+y_1$；接著又用板擦將黑板上其中任意兩數 x_2 與 y_2 擦去，再於黑板上添寫 $x_2y_2+x_2+y_2$；以此類推，小綠持續此過程直到黑板上只剩下一個數 S，試求 S 所有的可能值。

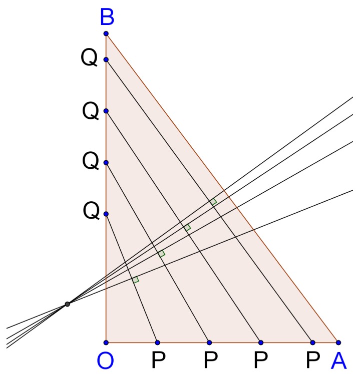
2-3 平面上一圓 Γ 的圓心為 O，且 $\overline{AB}$ 為不通過 O 點的一弦。在 $\overline{OB}$ 上任取一點 P，過 P 點作 $\overline{OB}$ 的垂線 L，令 L 與 $\overline{AB}$ 的交點為 C、且 L 與圓 Γ 的交點為 D 與 E。再過 P 對 $\overline{AB}$ 作垂線，垂足為 H。

請證明：$\overline{PD}\cdot\overline{PE}=\overline{AH}\cdot\overline{BC}$。



2-4 試找出所有的正整數組(a,b,c)，使得$\begin{cases} a=\gcd(b^2+1,c^2+1) \\ b=\gcd(c^2+1,a^2+1) \\ c=\gcd(a^2+1,b^2+1) \end{cases}$，其中 $\gcd(x,y)$ 表示 x,y 的最大公因數。

2-5 $\triangle AOB$ 為直角三角形，其中 $\angle AOB=90^\circ$。已知 P、Q 分別為 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 上的動點，且滿足 $\overline{AP}=\overline{BQ}$。請證明：無論 P、Q 如何變動，$\overline{PQ}$ 的中垂線都會通過某個固定的點。



2-6 試找出所有的函數 f，其定義域與對應域皆為實數集合 $\mathbb{R}$，且滿足：對於所有實數 x 與 y，$f(x)f(y)+f(x+y)=xy$ 都成立。